Bulletin 118 (septembre 2003) de l'INSTITUT DE LA MÉTHODE (Association Ferdinand Gonseth), pp. 1-8

Système solaire et chaos - Mort de l'effet papillon !

Gaston Fischer, *gfischer@vtx.ch*
Rue de Rugin 1A, 2034 Peseux, Suisse

Au cours des trois dernières décennies, les mathématiques ont fait d'énormes progrès sur plusieurs fronts nouveaux. On peut citer comme exemples la théorie des "fractals" et celle du "chaos". Dans les deux cas ces progrès ont rapidement trouvé des applications à des processus auxquels on n'avait d'abord pas pensé. Chacun de nous a probablement vu l'une de ces images de kaléidoscope créées par fractals, où l'image, lorsqu'on l'agrandit, révèle des détails toujours plus fins et, dans certains exemples, toujours nouveaux. Le plus souvent on introduit la notion des fractals en demandant quelle est la longueur d'un rivage de mer ou de lac. On se rend alors vite compte que cette question n'a pas de réponse univoque.

En mathématiques, la notion de chaos n'est pas forcément celle du désordre complet, celle de la foule désordonnée ou des molécules d'un gaz qui s'entrechoquent éternellement, où il serait illusoire de préciser la position de chaque personne ou molécule à tout instant. Le plus souvent on veut simplement dire que le système n'est pas prévisible au-delà d'une certaine limite temporelle. Dans cet ordre d'idées on a pu lire, à plusieurs reprises récemment, que même le système solaire finira dans le chaos. Mais le cheminement par lequel ce chaos va s'établir n'est généralement pas précisé; il vaut donc la peine de voir s'il s'agit de prédictions alarmistes, dans le simple but de faire du sensationnalisme gratuit ou si nous pouvons continuer de dormir en paix.

1. On ne connaît qu'imparfaitement le présent, le futur est donc encore plus aléatoire

Il est évident qu'à très longue échéance un certain désordre va s'installer dans le système solaire, mais cette affirmation n'a vraiment un intérêt que si l'on donne une estimation du temps nécessaire à son instauration. L'estimation de ce temps doit être abordée sous au moins quatre aspects. Le premier ne concerne pas une perturbation complète du système, mais seulement un désaccord entre ce que nous pouvons prédire et l'état qui s'établira effectivement au bout d'un certain temps. C'est un temps qui découle tout naturellement des incertitudes qu'il y aura toujours dans notre connaissance des paramètres orbitaux de toutes les composantes d'un système. Cela revient à dire que puisque nous ne connaissons les conditions initiales qu'avec une précision limitée, nous ne pouvons pas faire d'extrapolations parfaites, ni vers le futur, ni vers le passé. Ce temps, pour de petits écarts de prédiction, est au moins de l'ordre de 10 000 ans : en effet, nous sommes en mesure de reconstituer la succession des éclipses observées et enregistrées par nos prédécesseurs, surtout chinois, depuis plus de 5 000 ans. Les erreurs, sur cet intervalle, ne sont que d'environ une heure ou deux et pourraient, en réalité, provenir plutôt du deuxième effet (il vaut la peine de noter, ici, que 5 et 10 mille ans dans le passé correspondent assez exactement aux limites de l'ère néolithique). Nous pouvons donc affirmer que d'ici 10 000 ans, les incertitudes sur les paramètres orbitaux tels que nous les connaissons aujourd'hui, engendreront au maximum des incertitudes de quelques heures sur les orbites planétaires et qu'elles ne nous feront pas perdre toute connaissance de l'évolution du système solaire avant plusieurs millions d'années. Même au bout de ce temps beaucoup plus long, les rayons des orbites des différentes planètes n'auront pratiquement pas changé et on ne pourra pas dire que le système est devenu totalement chaotique. Il faudra probablement attendre quelques cinq milliards d'années, lorsque le Soleil aura épuisé son carburant d'hydrogène et s'effondrera pour immédiatement exploser par ricochet en nova ou géante rouge, pour que le système solaire soit vraiment fortement "chamboulé".

Le graphe de la Fig. 1 est une illustration de ce premier effet d'incertitude sur les conditions initiales. Il s'agit d'un pendule rigide, comme celui d'une horloge, mais excité beaucoup plus fortement par une force périodique, de façon à pouvoir le faire tourner complètement. Les trois courbes du graphe montrent les mouvements du pendule lorsque cette excitation est enclenchée alors que le pendule est soit au repos ($v = 0$), ou qu'il oscille déjà très imperceptiblement vers la droite ($v = 0.15$) ou vers la gauche ($v = -0.2$). Ces toutes petites différences dans les conditions initiales n'ont d'abord pas de conséquences importantes, les trois courbes suivent pratiquement le même chemin, mais soudain elles divergent et le chaos s'installe. Le balancier arrive au voisinage de la position complètement renversée, le demi-tour; dans deux des cas la force d'entraînement le ramène du même côté, alors que dans le troisième il fait un tour complet. Et dans les deux situations où il revient du même côté, ce n'est que partie remise, les deux courbes s'éloignent l'une de l'autre et sont bientôt, elles aussi, séparées d'un tour entier (ce graphe est adapté d'un exemple aimablement fourni par le Prof. Hans Beck et son assistant, M. Matteo Monbelli, de l'Institut de Physique de l'Université de Neuchâtel).

2. Le climat, source de désordre à très long terme dans le système solaire

Le deuxième effet est plus subtil. Les calculs astronomiques où interviennent plusieurs corps sont difficiles; on sait, par exemple, que le problème à trois corps ne peut déjà plus être résolu de façon analytique. Pour simplifier les calculs on remplace donc le Soleil, les planètes et leurs satellites par des points de masse sans dimensions. Cela serait sans conséquences, si ces corps étaient parfaitement indéformables et possédaient une symétrie exactement sphérique; mais cela n'est pas le cas. Comme exemples d'effets qui ne peuvent pas être traités ainsi on peut citer les marées. Des effets de ce genre ont pour conséquence que les deux satellites de Mars, Phobos et Deimos, vont bientôt (à l'échelle des temps géologiques, soit dans quelques millions d'années !) tomber sur leur planète. Le temps caractéristique pour l'instauration de petits écarts est aussi de l'ordre de 10 000 ans ou plus, mais on ne peut pas prédire l'ampleur exacte de ces effets, car ils dépendent de facteurs tels que le climat moyen (p. ex. la distribution des vents et des courants marins, le niveau des mers, etc.) et de la forme du globe dans tous ses détails (en particulier les déviations d'une sphéricité parfaite à cause des forces centrifuges causées par la rotation). Ainsi, au maximum de la dernière glaciation, le niveau des océans était-il de 130 m au-dessous du niveau actuel, cela avait une influence très importante sur les marées. En effet, le freinage provoqué par les marées dépend fortement de la topographie des fonds marins aux abords des côtes et de la forme de ces côtes. Par suite de la dérive des continents, la topographie du globe évolue constamment, bien que très lentement. En fin de compte on peut dire, pour ce deuxième effet, que les conclusions pour le court terme sont les mêmes que pour le premier : on ne prévoit rien de spectaculaire. Pour le très long terme de dizaines ou centaines de millions d'années, par contre, les prévisions sont de plus en plus incertaines.

La Fig. 2 est une illustration de ce que nous venons de dire : un processus oscillatoire est soumis à une perturbation croissante; au début cela ne semble pas l'influencer; mais la perturbation augmente et finalement l'oscillateur perd toute régularité et se comporte de façon totalement imprévisible (cet exemple nous a été fourni par le Prof. Edmond Geneux de S^{te}-Croix). Un exemple naturel, mais inversé dans le temps, nous est fourni par le climat. Pendant la dernière glaciation, qui s'est terminée voici quelques 12 000 ans, la température moyenne de tout l'Atlantique Nord pouvait changer en quelques années, et de façon totalement imprévisible, de quelques 5 °C, ce qui est énorme. Mais depuis 11 600 années, ces oscillations ont totalement disparu, pour des raisons qu'on ne s'explique pas encore bien aujourd'hui.

3. Les instabilités inhérentes aux systèmes planétaires

Laplace en 1772 et Lagrange en 1776 furent les premiers à poser la question de la stabilité des systèmes planétaires. Ils arrivèrent tous deux à la conclusion qu'au premier ordre des masses planétaires rapportées à la masse de l'étoile centrale, soit la masse du Soleil dans le cas qui nous intéresse ici, il n'y avait pas de termes séculaires, c.-à-d. de termes qui à très longue période peuvent conduire à des instabilités. En 1856 Le Verrier reprend ces calculs, mais cette fois il tient compte de termes d'ordre supérieur et constate que ces termes additionnels viennent modifier la valeur des fréquences séculaires du système. La stabilité du système solaire redevient ainsi une question non résolue.

Jacques Laskar (1996) fait l'historique des recherches entreprises à ce sujet au cours du siècle passé. Si la conclusion qu'à très long terme la stabilité des orbites planétaires ne peut pas être garantie de façon absolue, une collision entre Mercure et Vénus, par exemple, ne pourrait pas avoir lieu avant quelques 3,5 milliards d'années. Pour les planètes plus éloignées du Soleil, y compris la Terre, ce laps de temps est encore beaucoup plus long. Ainsi, même si le système solaire est instable de façon inhérente, des phénomènes catastrophiques conduisant à sa destruction sous sa forme actuelle ne peuvent avoir lieu que dans un temps comparable à son âge, soit environ 5 milliards d'années !

4. Des perturbations peuvent aussi venir de l'extérieur !

Dans une quatrième catégorie on doit mettre les interactions imprévisibles avec de gros astéroïdes venus de l'espace interstellaire. Ce qu'on entend ici par un gros astéroïde est un objet dont la masse vaut au moins quelques pour-cent de celle de la planète cible, par exemple, une collision entre la Terre et un bolide aussi massif que Mars, où la vitesse relative des deux corps est de plusieurs dizaines de kilomètres par seconde (comme exemple, la vitesse de la Terre dans son orbite autour du Soleil est proche de 30 km/s). La probabilité de telles collisions a diminué considérablement depuis la naissance du système solaire et elle est maintenant insignifiante.

On sait par exemple que dans son orbite de près de 250 ans Pluton descend à chaque tour sous celle de Neptune pendant des périodes d'une vingtaine d'années. On pourrait donc penser qu'une collision entre ces deux planètes est fort probable. Mais comme nous l'avons montré ailleurs (Fischer, 2002), ces deux planètes sont dans une interaction de résonance et elles adaptent leurs trajectoires de façon à garantir que la collision soit évitée. Une démonstration que ce mécanisme a parfaitement fonctionné sur une très longue période est fournie par le satellite Charon de Pluton. Pluton et Charon tournent l'un autour de l'autre à la même vitesse qu'ils tournent sur eux-mêmes, sur des orbites parfaitement circulaires autour de leur centre de gravité commun (Fischer 2003). Ainsi ce sont toujours les deux mêmes hémisphères de ces astres qui se font face. Cela signifie que les deux partenaires de cette danse ont connu pendant une très longue période, probablement de plusieurs centaines de millions d'années, une interaction gravitationnelle du même type que celle qui sur Terre produit les marées. Pluton ne pourrait donc en aucun cas avoir été capturé récemment par le système solaire et bien qu'il plonge régulièrement à l'intérieur de l'orbite de Neptune, sa propre orbite a certainement connu une remarquable stabilité sur cette très longue durée de centaines de millions d'années. Cette constatation s'accorde mal avec l'affirmation de Laskar (1996) qui prétend que l'orbite de Pluton est chaotique, *mais reste confinée dans d'étroites limites*, ajoute-t-il pourtant. Même s'il est acquis que Pluton est une planète qui a été capturée bien après la formation du Système solaire, cette capture s'est faite il y a déjà fort longtemps et Pluton et son satellite Charon se sont fort bien intégrés à leur nouvel environnement solaire.

5. Les théories du chaos et les prédictions à long terme, la flèche du temps

A l'origine, la théorie des phénomènes chaotiques a été développée en relation avec les prédictions météorologiques, mais on a bientôt compris que presque tout ce qui évolue aboutit finalement à une forme de chaos. Tous ceux qui s'intéressent aux "prévisions météorologiques" ont sûrement remarqué qu'on se limite en général à prédire le temps des cinq jours à venir. La raison en est bien simple : au-delà de cinq jours, et cela en dépit de l'énorme capacité de calcul des plus gros ordinateurs dont on dispose aujourd'hui, les prédictions deviennent terriblement incertaines : on ne peut guère leur accorder de crédit. Les théories du chaos avaient justement pour objet de comprendre pourquoi il en est ainsi.

Ces mêmes théories ont permis de jeter un éclairage nouveau sur pratiquement tous les systèmes complexes, en particulier ceux comprenant un grand nombre de particules, comme les gaz et les liquides, ou d'autres qui obéissent à des équations non-linéaires. Les lois élémentaires de la physique sont généralement réversibles, c.-à-d. qu'elles restent invariantes par rapport à une inversion du temps. Mais dès qu'on cherche à décrire le comportement de certains systèmes comprenant des équations non-linéaires, ou d'autres composés d'un très grand nombre d'éléments, cette réversibilité peut disparaître : avec le temps qui s'écoule apparaît un désordre grandissant, le chaos s'installe soudain rapidement. Le physicien dit que l'entropie augmente.

On cite souvent le parfum qui diffuse de sa bouteille dans une chambre entière, ou le mélange d'un colorant soluble dans un liquide, pour illustrer les phénomènes qu'on dit irréversibles, ceux où l'on passe d'une situation bien ordrée, avec le parfum dans la bouteille fermée et de l'air parfaitement inodore dans la chambre, à un désordre complet, celle du parfum qui s'est totalement mélangé à l'air. Même si c'est à dessein qu'on a ouvert la bouteille, il y a désordre dans le sens qu'on ne peut pas revenir en arrière, faire retourner le parfum dans sa bouteille. Il vaut peut-être la peine de préciser les conditions de cette expérience : supposons une chambre type de 50 m^3 et une bouteille de 20 ml de parfum, le tout à pression et température normales. A la place du couvercle de la bouteille on place un détecteur des molécules de parfum, qui compte celles qui entrent et celles qui sortent. Dès que le système constate que toutes les molécules de parfum sont retournées dans la bouteille, un couvercle ferme cette dernière et enregistre l'heure de la fermeture. On peut parier sans crainte qu'il faudra en moyenne plus que l'âge de l'Univers pour observer la fermeture de la bouteille. C'est une expérience simple, qu'on pourrait sûrement mettre en œuvre. Même si on ne la verra jamais aboutir à la fermeture de la bouteille, tout le monde la comprend facilement (n'oublions pas, cependant, que pour vérifier que ce retour a vraiment eu lieu, il faudrait que la bouteille se ferme immédiatement et reste fermée, sinon le parfum en ressortirait aussitôt et on n'aurait aucune preuve que le retour momentané s'est effectivement produit). Cette irréversibilité manifeste suggère une direction pour l'écoulement du temps et les théories du chaos ont ainsi contribué à une meilleure compréhension de la notion de "*flèche du temps*".

6. L'effet papillon

Comme illustration extrême des conséquences lointaines d'un tout petit effet, *dans le temps comme dans l'espace*, on cite souvent ce papillon, dont les battements d'ailes à Tokyo engendrent un orage à Paris. Mais on peut montrer que la probabilité d'une telle relation de cause à effet est encore incroyablement plus improbable que de voir tout le parfum réparti dans une chambre retourner d'un coup dans la bouteille.

L'idée de l'effet papillon est née à la suite des travaux de Lorenz (1963, 1965) et Arnold (1966). Ces auteurs avaient essayé de modéliser le comportement de l'atmosphère terrestre comme s'il s'agissait d'un système a seulement deux dimensions. Ces auteurs pensaient que vu l'énorme étendue de l'atmosphère et son épaisseur comparativement très faible, il devait être possible de modéliser son comportement en négligeant l'extension verticale. Cette façon de faire simplifiait grandement les calculs et semblait justifiée puisque l'atmosphère s'étend sur la surface entière du globe, alors qu'elle est limitée en altitude à quelques dizaines de kilomètres. En effet, si la totalité de l'air était comprimée en une couche à la pression qu'elle a au niveau de la mer, soit la pression d'une atmosphère, cette couche n'aurait qu'une épaisseur de huit kilomètres. Cette petite épaisseur, comparée au pourtour terrestre de 40'000 km, devait garantir une certaine crédibilité au modèle à deux dimensions.

Lors d'un congrès de mathématiciens, en 1962, Lorenz pouvait montrer que son modèle atmosphérique à deux dimensions comportait une sensibilité exponentielle, une sensibilité qui diverge par rapport aux conditions initiales. Un contradicteur lui fit alors remarquer que si le mouvement de l'atmosphère était aussi instable qu'il le prétendait, il suffirait d'un battement d'aile d'une mouette pour changer irrémédiablement son évolution. Lorenz soutint que c'était bien le cas et de plus, que ce changement se produirait en deux semaines environ. Dans cette polémique la mouette se métamorphosa en papillon. "*L'effet papillon*" était né et les travaux subséquents d'Arnold et Lorenz sur les modèles bi-dimensionnels venaient le confirmer.

Tout récemment, un mathématicien français, Raoul Robert (2001) a pu montrer que l'effet papillon est une caractéristique des systèmes à deux dimensions, mais que cette propriété d'instabilité exponentielle disparaît totalement lorsqu'on passe à trois dimensions et il a dès lors intitulé son article "*L'effet papillon n'existe plus !* ".

Une remarque que l'on peut faire concernant les systèmes qui se limitent à deux dimensions et qui ne s'applique pas à ceux qui en ont davantage, est la suivante. Si on considère deux particules données en mouvement aléatoire dans un système bi-dimensionnel, on peut faire un décompte du nombre de révolutions qu'une particule donnée fait autour d'une autre particule sélectionnée. Il s'agit donc de mouvements relatifs et on voit sans difficulté que le phénomène est réciproque : lorsque la particule **a** fait n tours dans un sens autour de la particule **b** , cela revient à dire que la particule **b** fait n tours de **a** , mais en sens inverse. Il se pourrait que la somme de ces tours, tous comptés positivement, augmente progressivement avec l'écoulement du temps, comme $t^{1/2}$ par exemple, et représenter ainsi une sorte de coordonnée du temps. Un tel décompte ne peut pas être fait pour les systèmes qui ont plus de deux dimensions. Cela pourrait être lié au fait que pour les systèmes à trois dimensions ou davantage, et ceci malgré ce que nous venons de dire au **§** précédent, il est plus difficile d'imaginer un phénomène qui caractérise le concept d'une *flèche du temps*.

Remerciements

L'auteur tient à remercier le Professeur Alain Robert de l'Université de Neuchâtel qui l'a tenu au courant des derniers développements relatifs à l'effet papillon.

Quelques références

Fischer, G. : "Ballets dans le ciel : les résonances gravitationnelles dans le système solaire", **ORION**, *Revue de la Société Astronomique de Suisse*, no. **309** (avril 2002), pp. 4 - 10.

Fischer, G. : "Marées et orbites célestes", **ORION**, *Revue de la Société Astronomique de Suisse*, no. **315**, (avril 2003), pp. 4 - 9.

Laskar, J. : "Chaos à échelle dans le Système Solaire et implications planétologiques", *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. **322**, série **II a, 1996**, pp. 163 – 180.

Lorenz, E. N. : "Deterministic nonperiodic flow", *J. Atmosphric Sci.* **20, 1963**, pp. 130 – 141.

Lorenz, E. N. : "A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model", *Tellus Ser.* **A 17, 1965**, pp. 321 – 333.

Robert, R. : "L'effet papillon n'existe plus", *Gazette des Mathématiciens*, Soc. Mathématique de France, no. **90** (octobre 2001), pp. 11 – 25.

Légendes des figures

Fig. 1. Pendule rigide, excité par une force périodique de basse fréquence et forte intensité, pour trois conditions initiales très légèrement différentes.

Fig. 2. Oscillateur pratiquement linéaire aux faibles amplitudes, excité par une force grandissante. Les caractéristiques non-linéaires du système prennent progressivement le dessus. Finalement le système a un comportement chaotique imprévisible.

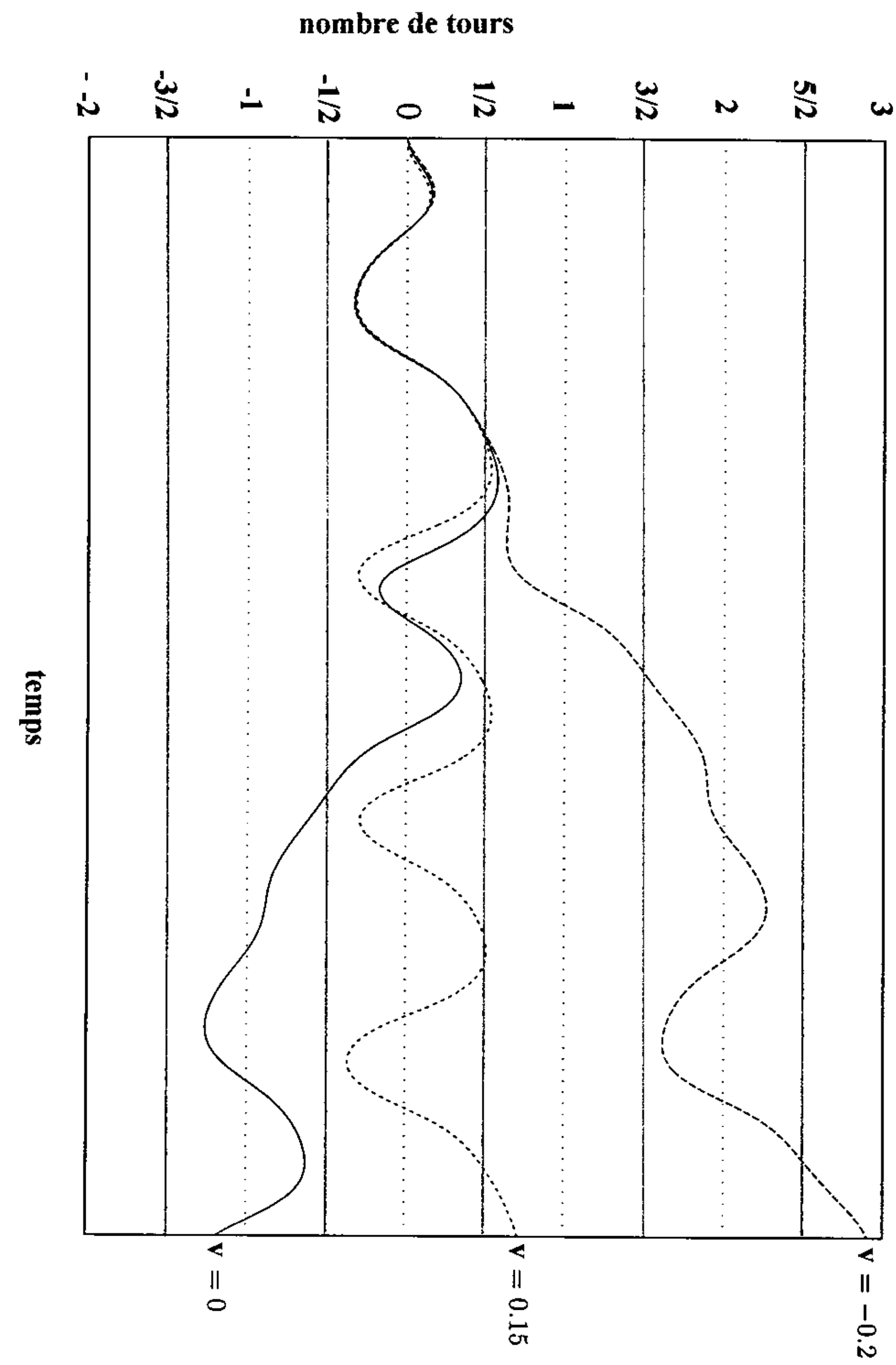

Fig. 1. Pendule rigide, excité par une force périodique de basse fréquence et forte intensité, pour trois conditions initiales très légèrement différentes.

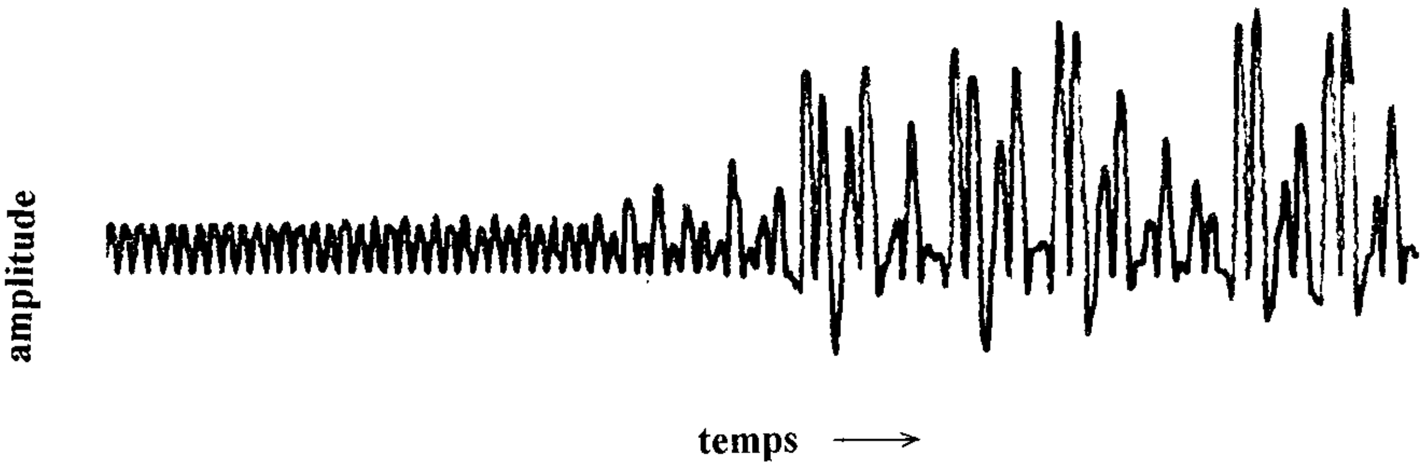

Fig. 2. Oscillateur pratiquement linéaire aux faibles amplitudes, excité par une force grandissante. Les caractéristiques non-linéaires du système prennent progressivement le dessuss. Finalement le système a un comportement chaotique imprévisible.